ECOLE POLYTECHNIQUE

OPTION M'

CONCOURS D'ADMISSION 1991

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

Le but principal de ce problème est d'étudier dans quelques cas le comportement de la somme d'une série entière en un certain point de son cercle de convergence. La partie I est consacrée à des préliminaires.

PARTIE I

On considère une fonction ϕ définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$, continue, réelle, décroissante, strictement positive.

1. On suppose l'intégrale $\int_0^{+\infty} \phi(x)\,dx$ convergente.

a - Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} h\,\phi(nh)$ est convergente pour tout $h > 0$.

b - Déterminer la limite de sa somme lorsque h tend vers 0.

2. On suppose seulement l'intégrale $\int_0^1 \phi(x)\,dx$ convergente. On désigne par E(x) la partie entière d'un réel x et on pose :

$$s(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]0,1[\\ \sum_{k=1}^{E(x)} \phi(k) \text{ si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$$

$$c_k = \int_{k-1}^{k} \phi(t)\,dt - \phi(k) \qquad \forall k \in \mathbf{N}^* \qquad\qquad C = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

$$\psi(x) = s(x) - \int_0^x \phi(t)\,dt + C \qquad \forall x \geq 0$$

a - Démontrer que C existe effectivement.

b - Vérifier que la fonction $\theta(x) = \dfrac{\psi(x)}{\phi(x)}$ est bornée sur $]0,+\infty[$.

[On pourra distinguer deux cas, suivant que $x < 1$ ou $x \geq 1$]

PARTIE II

On se propose d'étudier la fonction f somme de la série entière : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$

On pose $A_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$, de sorte que l'on a $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = A_n - A_{n-1}$ pour $n \geq 2$.

3. Préciser le rayon de convergence de cette série, ainsi que la limite de sa somme lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures (ce que l'on notera $x \uparrow 1$).

A SUIVRE

4. Montrer que, lorsque $x \uparrow 1$, $f(x)$ est équivalent à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}$.

[On pourra poser $h = -\ell n\ x$ et considérer la fonction $\phi(t) = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$; on donne la formule : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$]

5. On définit une fonction s sur $[\,0,+\infty[$ par : $s(y) = \begin{cases} 0 \text{ si } y \in [\,0,1\,[\\ \sum_{n=1}^{E(y)} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ si } y \in [\,1,+\infty[\end{cases}$

Vérifier que l'on a $f(x) = h \int_0^{+\infty} s(y)\, e^{-hy}\, dy$

avec, comme plus haut, $h = -\ell n\ x$.

6.a - Montrer que $f(x) - \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-x}}$ admet une limite lorsque $x \uparrow 1$.

b - Relier cette limite à $f(-1)$.

PARTIE III

7. Déterminer l'ensemble des valeurs du nombre complexe x pour lesquelles l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{du}{e^{u^2} - x}$$

est convergente. Lorsqu'elle l'est, on pose :

$$g(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{e^{u^2} - x}$$

8. Montrer que f et g coïncident sur le disque ouvert $|x| < 1$.

[On pourra développer $\dfrac{1}{1 - x\,e^{-u^2}}$.]

9. Montrer que $g(x) + \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\ell n\, |x|}$ tend vers 0 lorsque x est réel et tend vers $-\infty$.

[On pourra poser :

$$x = -e^{t^2} \quad , \quad t \geq 0 \quad , \quad \phi_t(u) = \frac{1}{e^{(u^2 - t^2)} + 1},$$

puis minorer $\int_0^{+\infty} \phi_t(u)\, du$ par $\int_0^{t-\varepsilon} \phi_t(u)\, du$, où ε est un nombre réel vérifiant $0 < \varepsilon < t$, et majorer $\int_0^{+\infty} \phi_t(u)\, du$ en l'écrivant sous la forme $\int_0^{t} \phi_t(u)\, du + \int_t^{+\infty} \phi_t(u)\, du$.]

Tournez la page S.V.P.

PARTIE IV

On suppose maintenant x complexe de module 1, donc de la forme $x = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0,2\pi]$. On pose :

$$C(\theta) = \operatorname{Re} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{\sqrt{n}} \qquad \forall \theta \in]0,2\pi[$$

$$S(\theta) = \operatorname{Im} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{\sqrt{n}} \qquad \forall \theta \in [0,2\pi]$$

10. Justifier ces définitions. [On pourra introduire les sommes partielles des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta$.]

11.a - Trouver une constante K telle que :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin \frac{k\pi}{4n} \geq K\sqrt{n} \qquad \forall n \geq 1.$$

b - La série de terme général $\frac{\sin n\theta}{\sqrt{n}}$ converge-t-elle uniformément sur l'intervalle $[0,2\pi]$?

12. Démontrer, en utilisant une méthode analogue à celle de la question **8.**, que $f(e^{i\theta}) = g(e^{i\theta})$ pour $\theta \in]0,2\pi[$. En déduire que

$$C(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} W_\theta(u)\, du$$

où on a posé :

$$W_\theta(u) = \frac{e^{u^2}\cos\theta - 1}{e^{2u^2} - 2\,e^{u^2}\cos\theta + 1}$$

13. On fixe θ dans $]0, \frac{\pi}{2}[$. Déterminer les zéros de W_θ et de sa dérivée, le sens de variations de W_θ, sa valeur en 0 et sa limite lorsque $u \to +\infty$. Donner une esquisse de la courbe représentative.

14. Déterminer la limite de $C(\theta)$ lorsque θ tend vers 0 par valeurs positives.

♦ ♦
♦

FIN